Wyznaczanie wzoru rekurencyjnego ciągu z wykorzystaniem narzędzi technologii informacyjnej (Excel, C++)

Rafał Świetlicki

Na pierwszej lekcji z działu Ciągi liczbowe m.in. ćwiczę z uczniami wyznaczanie wzoru ogólnego podanego poprzez wypisanie kilku początkowych wyrazów ciągu liczbowego. Są to oczywiście najprostsze ciągi typu: ciąg liczb parzystych, ciąg harmoniczny. Zawsze również wypisuję uczniom kilka początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego. Jednakże w tym przypadku uczniowie po chwili zastanowienia zauważają zależność, że każdy wyraz począwszy od trzeciego jest sumą dwóch bezpośrednio poprzedzających go wyrazów, a zatem nieświadomie wyznaczają wzór rekurencyjny tego ciągu. Chciałbym w tym artykule zaproponować ćwiczenia w wyznaczaniu wzoru rekurencyjnego ciągu liczbowego, który będą stanowić pierwiastki równania Pella przy jednoczesnym wykorzystaniu narzędzi technologii informacyjnej w postaci arkusza kalkulacyjnego Excel oraz języka programowania C++.

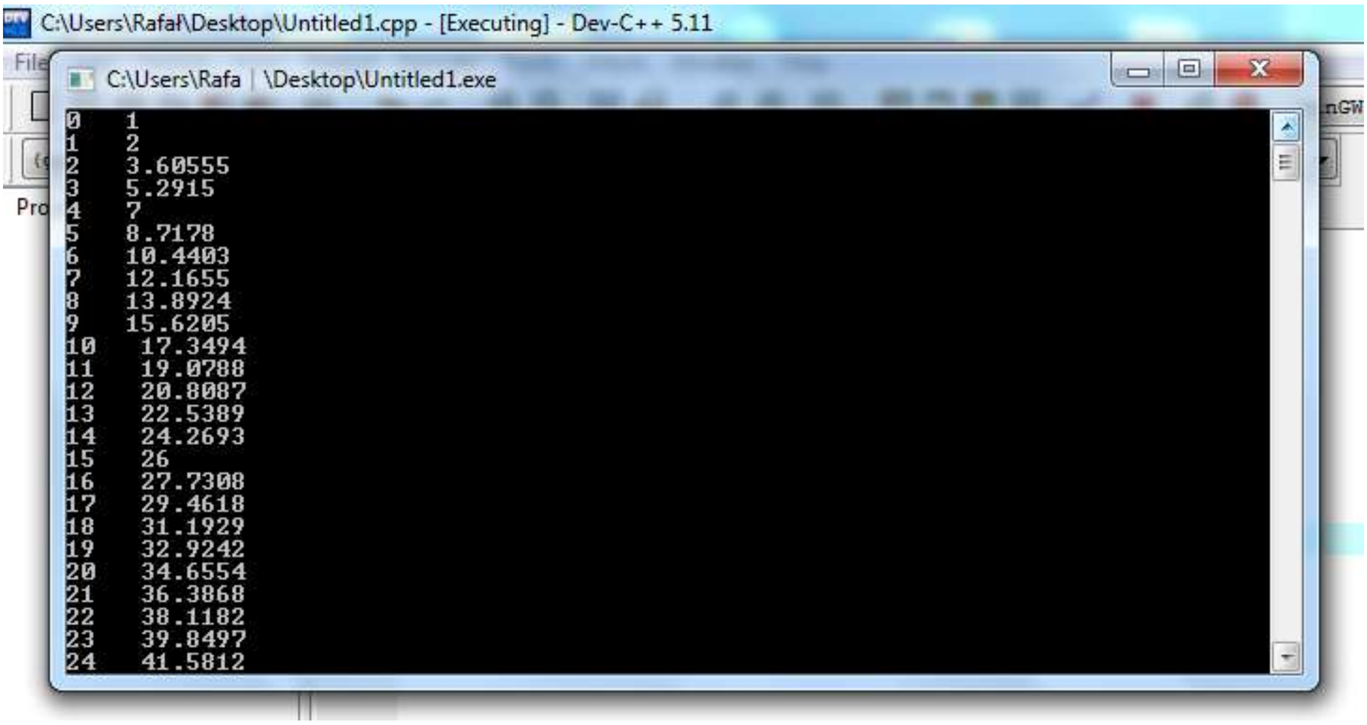
Czym jest równanie Pella? Jest to równanie postaci $x^2 - Dy^2 = 1$, gdzie D jest liczbą całkowitą dodatnią nie będącą kwadratem innej liczby całkowitej. Rozwiązując równanie Pella poszukujemy par liczb całkowitych (x, y) spełniających to równanie. Oczywiście rozwiązaniem tego równania jest para liczb $(1,0)$. Jak wiadomo, jeżeli D jest liczbą całkowitą dodatnią nie będącą kwadratem innej liczby całkowitej, to równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. W tym artykule zajmiemy się przypadkiem $D = 3$, czyli równaniem postaci $x^2 - 3y^2 = 1$. Wykorzystując narzędzia technologii informacyjnej spróbujemy znaleźć kilka początkowych par rozwiązań tego równania oprócz pary $(1,0)$. W tym celu zajmiemy się problemem równoważnym, czyli wyznaczeniem ciągu liczb całkowitych nieujemnych y takich, aby liczba $3y^2 + 1$ była kwadratem liczby całkowitej. Łatwo zauważyć, że pierwsze dwa wyrazy tego ciągu to liczby 0 oraz 1. Aby znaleźć kolejne wyrazy bez żmudnych obliczeń można wykorzystać arkusz kalkulacyjny Excel albo napisać prosty program przy pomocy np. języka programowania C++.

	A	B	C
1	0	1	
2	1	2	
3	2	3,605551	
4	3	5,291503	
5	4	7	
6	5	8,717798	
7	6	10,44031	
8	7	12,16553	
9	8	13,89244	
10	9	15,6205	
11	10	17,34935	
12	11	19,07878	
13	12	20,80865	
14	13	22,53886	
15	14	24,26932	
16	15	26	
17	16	27,73085	
18	17	29,46184	
19	18	31,19295	
20	19	32,92416	
21	20	34,65545	

Kolumna A arkusza zawiera kolejne liczby naturalne, zaś kolumna B wartość wyrażenia $\sqrt{3y^2 + 1}$, gdzie y to liczba z kolumny A. Już widać, że kolejne dwa wyrazy tego ciągu to liczby 4 oraz 15, zaś kolejne to: 56, 209, 780 itd.

Można również napisać prosty program w języku C++, który wygeneruje nam kolejne wyrazy tego ciągu.

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
	const int n=100;
	for(int i=0;i<n;i++)
		cout<<i<<"   "<<sqrt(3*i*i+1)<<endl;
	return 0;
}
```



Zatem ciąg liczb y to ciąg postaci: 0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, ...
Pozostaje najtrudniejsza część zadania: znaleźć zależność między tymi liczbami. Po dokładnej analizie można zauważyć, że:

$4 = 4 \cdot 1 - 0$

$15 = 4 \cdot 4 - 1$

$56 = 4 \cdot 15 - 4$

$209 = 4 \cdot 56 - 15$

itd.

A więc przypuszczamy, że liczby y spełniają zależność rekurencyjną:

$$y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2},\ n \geq 3,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Jest to, jak nie trudno udowodnić zależność prawdziwa.
Wyznaczymy jeszcze jawny wzór tego ciągu. W tym celu należy najpierw rozwiązać równanie kwadratowe:

$$y^2 = 4y - 1.$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $2-\sqrt{3}$ oraz $2+\sqrt{3}$. Zatem:

$$y_n = \alpha\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \beta\left(2+\sqrt{3}\right)^n,\ n \geq 1.$$

Współczynniki α, β wyznaczamy na podstawie informacji: $y_1 = 0,\ y_2 = 1$.

Ostatecznie:

$$y_n = \frac{-2\sqrt{3}-3}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n,\ n \geq 1$$

bądź nieco prościej:

$$y_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right],\ n \geq 1.$$

W analogiczny sposób możemy wyznaczyć zależność rekurencyjną dla ciągu liczb x:

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2},\ n \geq 3,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Zatem rozwiązaniem równania $x^2 - 3y^2 = 1$ jest para liczb $(x_n,\ y_n)$, gdzie:

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2},\ n \geq 3,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$
$$y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2},\ n \geq 3,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Podobnie można ćwiczyć wyznaczanie wzorów rekurencyjnych ciągów dla każdej innej liczby D występującej w równaniu $x^2 - Dy^2 = 1$.